

正規分解法による固有振動モード別の減衰推定に関する研究

—実構造物振動データを用いた検証—

池田 健一郎

1. 序論 多自由度構造物の動的応答波形において各振動モード成分の抽出を行う場合、特定の周波数のみを通すバンドパスフィルターの使用等の手法があるが、これらの手法は周波数域幅の選定に基準があるわけではなく、いくつかの副作用を有する。しかし、既報告のように正規分解法^{1) 2)}は、このような副作用を生じることがなく優れたフィルター性能を有し、また減衰を求める際にRD法との相性が良い。³⁾本報告では、いくつかの算定モデルでその有効性が確認された正規分解法の実構造物データへの適応例として、人力加振試験及び強風時(1996年12号台風)に計測された加速度波形をもとに考察を行う。

2. 正規分解法の説明

運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \dots (1)$$

において \mathbf{C} (減衰マトリックス) が振動モードに対する直行性を有すると仮定したとき、固有モードマトリックス Φ と、変位成分の一般化座標ベクトル $\mathbf{q}(t)$ を用いて、

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad \dots (2)$$

と表せる。ここで(2)式の両辺に左側から $\Phi^T \mathbf{K}$ をかけて整理すると

$$\mathbf{q}(t) = (\Phi^T \mathbf{K} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad \dots (3)$$

となる。(3)式を用いて各振動成分 $\mathbf{q}(t)$ を抽出する手法を正規分解法と呼ぶ。^{1) 2) 3)}

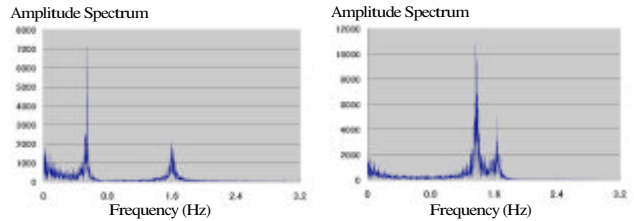
但し、正規分解法の適応後にRD法を用いて減衰定数を算定した場合、その場合変位波形は低い固有振動数成分の寄与が大きく、多くの重ね合わせ回数を必要とする⁴⁾ため、更に(3)式を2階微分した(4)式(下記)を用い、加速度波形に正規分解法を適用している。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) &= (\Phi^T \mathbf{K} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{K} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{T} \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

(ここに $\mathbf{T} = (\Phi^T \mathbf{K} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{K}$)

(3)式を用いた高橋らの研究²⁾では、多自由度構造物の減衰を求める場合、バンドパスフィルターで処理した波形に比べて、正規分解により処理した波形をRD法に用いた方が、少ない重ね合わせ回数、すなわち少ないデータ数でも精度の良い減衰を求めることができ、さらに各モードの固有振動数の比が小さな場合(モード固有振動数が近接している場合)でも、精度の良い減衰の推定が可能

であるという結論を得ている。(図1-1, 2参照)

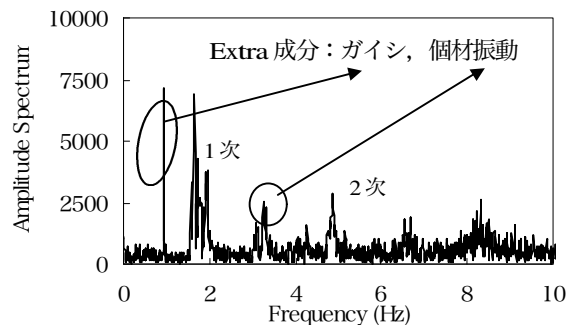


[図1-1：近接していない場合] [図1-2：近接している場合]

3. 人力加振試験計測波形への適用

対象構造物, 対象データ 正規分解法を人力加振試験計測波形に適用する。加振試験の対象構造物は、塔高 59.7 mのLA型送電用懸垂型鋼管鉄塔である。但し、人力加振は微風時において鉄塔頂部を1次加振4名、2次加振1名で行った。また、正規分解法に用いる線路直角方向加速度データは高さ方向3点に設置した加速度計(K2, K4, K6)から得た。

実構造物へ正規分解法を適用するにあたり、対象構造物の非減衰固有モードマトリックス(Φ)、および剛性マトリックス(\mathbf{K})を求める必要がある。本報告では汎用構造解析プログラムMSC/NASTRAN for Windows Ver.4.5を用いて上記の情報を作成した。(解析モデルの部材要素は、鋼管(主柱材、腹材)または山形鋼(補助材)の断面形状を有する梁要素とし、部材接合部は全て剛接合とした。)適用に関する問題点 2.で記した様に理想状態で確立された正規分解法の振動試験データへの適用にあたっては、実構造物データに含まれる振動モード以外の成分(以後 EXTRA 成分と呼ぶ)の寄与を考慮に入れなければならない。(図2参照)



[図2：EXTRA成分説明]

すなわち、(4)式における $\ddot{x}(t)$ は、

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) + \text{Extra}(t) \dots (5)$$

(但し $\ddot{y}(t)$ ：実構造物の振動試験データ

$\ddot{x}(t)$ ：モード波のみの組合せによる加速度波形

$\text{Extra}(t)$ ：ガイシ、個材振動、人力加振外力等

となり、(4)式は次の様に Extra 成分を含む一般化座標

$\ddot{p}(t)$ となる。

$$\ddot{p}(t) = T\ddot{y}(t)$$

$$= T(\ddot{x}(t) + \text{Extra}(t))$$

$$= T\ddot{x}(t) + T \cdot \text{Extra}(t) \dots (6)$$

このため(6)式により得られた $\ddot{p}(t)$ は、Extra 成分の寄与を受ける事になり、各モード波形のみを抽出することが出来ない。また、人力加振試験計測波形は加速度計3つから得られた加速度波形であるため、高次のモード成分も Extra 成分となる。

アンサンブル平均による Extra 成分の影響低減

前節で Extra 成分の説明を行ったが、本報告では1つの手法例として、人力加振試験における以下2つの性質を仮定することにより、Extra 成分の影響低減を図る。

- ・前節で定義した Extra 成分は、ガイシ、送電線、個材振動、人力加振時の加振外力、4次モード以上のモード波形、etc から成るが、それらは全ての人力加振試験データにランダムに含まれていると仮定する。

- ・それぞれの振動試験データにおいては、ほぼ1次、2次もしくは3次のピークが存在するが、加振状態によってその状況は異なる。

上記2つの性質を仮定すると、各試験データ(サンプル)のアンサンブル平均をとることによって、1次、2次、3次モードの成分が相対的に大きくなり、Extra 成分の影響を以下の様に少なくすることが出来る。

例えば、1自由度の運動方程式において、 ζ ：減衰定数 ($\zeta \ll 1$)、 ω ：固有角振動数、 $F(t)$ ：期待値ゼロのランダム確率過程外力とすると、

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = F(t) \dots (7)$$

における一般解は、 $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ とおくと自由振動解 $D(t)$ と、ランダムダム外力 $F(t)$ による強制振動解 $R(t)$ の和で次の様に表される。

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t - \varphi) + \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = D(t) + R(t) \dots (8)$$

(ここに $h(t)$ ：インパルス応答関数)

応答 $x(t)$ の期待値 $E[x(t)]$ は次式の様になる。

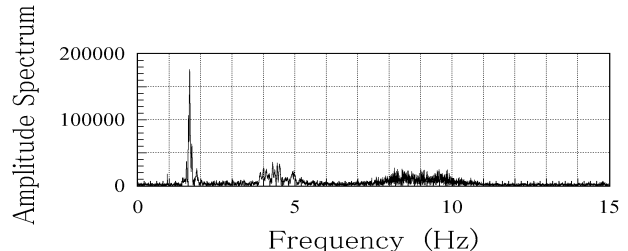
$$E[x(t)] = E[D(t)] + E[R(t)] \dots (9)$$

ここで、外力 $F(t)$ は期待値ゼロとしているため、

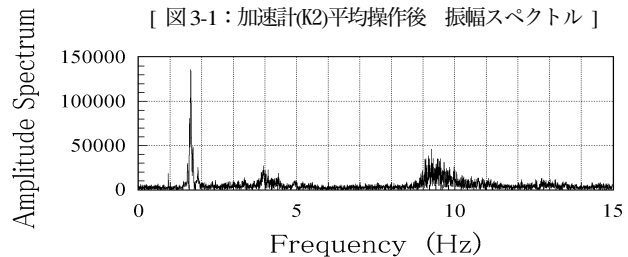
$$E[R(t)] = \int_0^t E[F(\tau)]h(t-\tau)d\tau = 0 \dots (10)$$

となる。⁴⁾

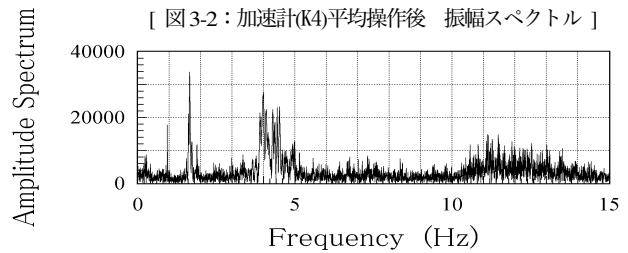
正規分解 人力加振試験データのアンサンブル平均後の加速度波形を正規分解した。図3-1,2,3にそれぞれの加速度計測データに平均操作を行った波形に対するスペクトルを示す。図4-1,2,3は、これをそれぞれ正規分解して求めた1次,2次,3次の一般化座標の波形についてのスペクトルである。正規分解前後を比較すると1次,2次,3次成分に正規分解できている。



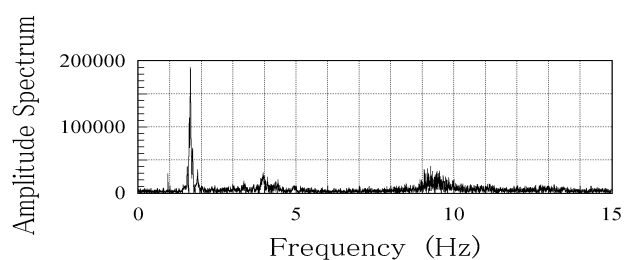
[図3-1：加速計(K2)平均操作後 振幅スペクトル]



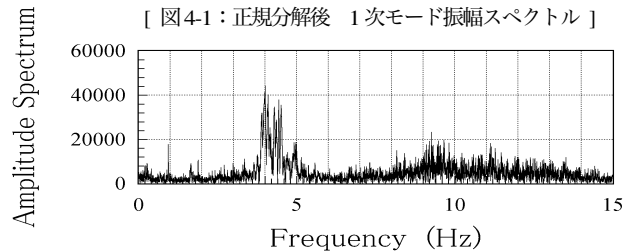
[図3-2：加速計(K4)平均操作後 振幅スペクトル]



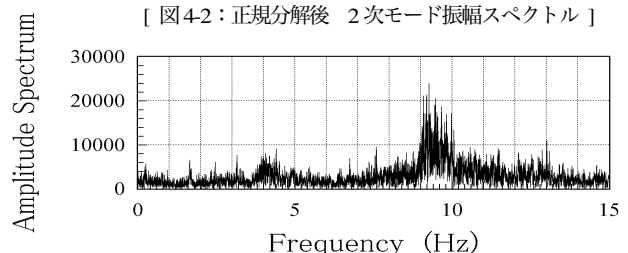
[図3-3：加速計(K6)平均操作後 振幅スペクトル]



[図4-1：正規分解後 1次モード振幅スペクトル]



[図4-2：正規分解後 2次モード振幅スペクトル]



[図4-3：正規分解後 3次モード振幅スペクトル]

減衰定数の算出 前節で得られた正規分解後の波形に、RD法および自己相関法を直接もしくはAR近似して用い減衰波形を算出し、最小二乗法による近似手法で減衰定数を求めた。なお、RD法に関する重ね合わせ回数は1次が150回、2次が350回、3次で600回であり、RD法の適用後には矢澤⁶⁾の報告により、重ね合わせ回数によらず精度の良い減衰算定が可能である対数減衰率による近似手法を最小二乗法による近似と別に用意した。また、正規分解と比較するため、バンドパスフィルターを用いて同様の手法で減衰の算定を行った。表1に減衰算定に用いた各手法の組合せを示す。上記した手法を用いて波形ごとに1次、2次、3次モードの減衰定数を求めた結果を、順に図5-1, 2, 3に示す。

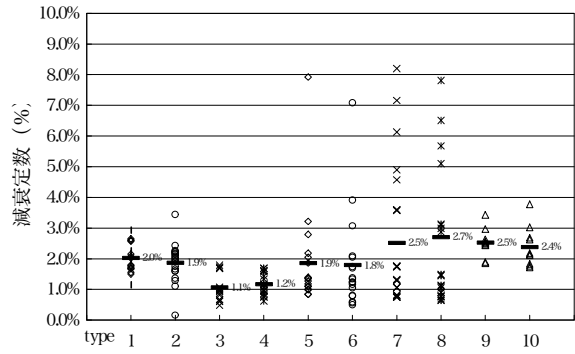
1次、3次モード成分の減衰定数を算定した結果をプロットした図5-1, 3によると、減衰定数の各typeごとの平均値は1%~3%の間に収まっているが、正規分解法を用いて算定したtype1~4は、バンドパスフィルターを用いて減衰定数を求めたtype5~8に比べると、ばらつきが小さくなった。しかし、2次モード成分の減衰値の算定に関しては、計測された加速度波形が図3-1~3-3に示されるようにピーク(山)が割れる現象が確認され、全ての手法でばらつきが非常に大きくなった。また、各モード成分の減衰定数算定において正規分解法とAR近似を用いた自己相関法を組み合わせた手法では他の算定手法に比べて非常にばらつきが少なかった。

[表1：減衰算定における各手法の組合せ]

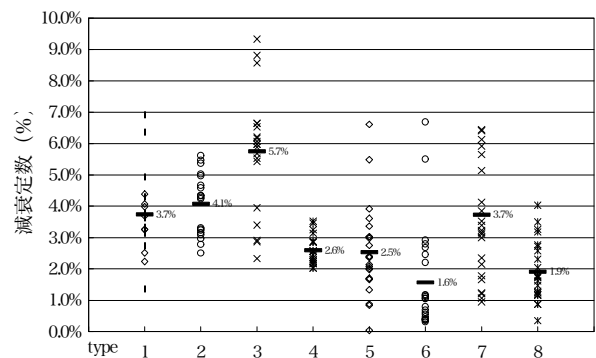
type	各モード抽出の手法	減衰波形の取得方法	減衰曲線の近似手法
type1	正規分解法	RD法	対数減衰率
type2			最小二乗法
type3		自己相関法	直接
type4			AR法
type5	バンドパスフィルター	RD法	対数減衰率
type6			最小二乗法
type7		自己相関法	直接
type8			AR法
type9	人力加振試験による減衰波形		対数減衰率
type10			最小二乗法

4. 強風時計測波形への適用

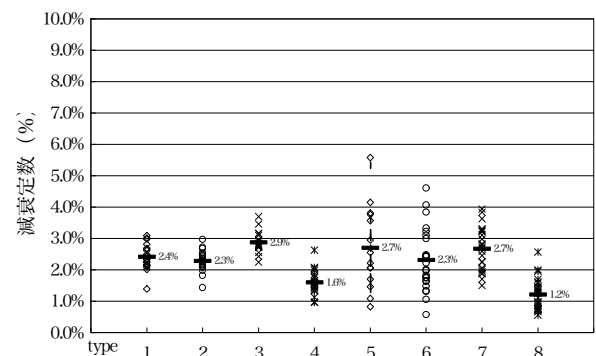
対象構造物、対象データ 本論では人力加振試験による計測波形へ正規分解法を適用した例と比較するため、1996年の台風12号通過時に計測された加速度波形に正規分解法を適用した。対象波形は塔高214mの大戸瀬戸海峡横断懸垂型鉄塔において高さ方向2点に設置された加速度計で計測された線路直交方向成分波形を用いた。また、正規分解法で使用する固有モードマトリックス(Φ)および剛性マトリックス(\mathbf{K})は、先に3.で述べた手法を用いて求めた。



[図5-1：1次モード成分 各算定手法による減衰定数]



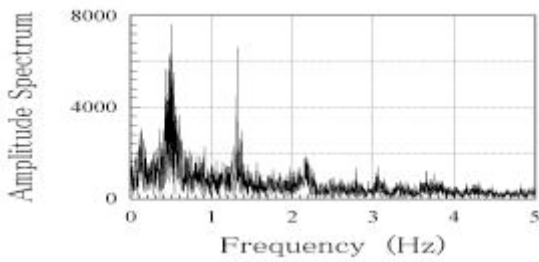
[図5-2：2次モード成分 各算定手法による減衰定数]



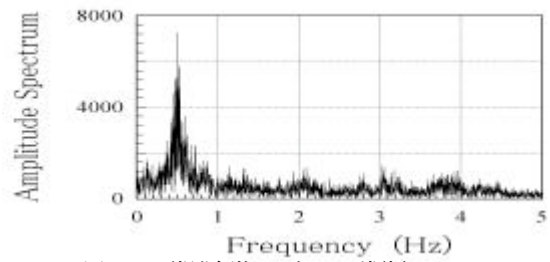
[図5-3：3次モード成分 各算定手法による減衰定数]

正規分解

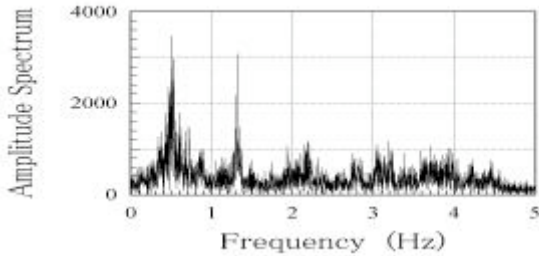
強風時に計測された加速度波形を正規分解した。正規分解前の加速度波形の振幅スペクトルを図6-1, 6-2に、正規分解後の波形の振幅スペクトルを図7-1, 7-2に示す。固有モードマトリックスに1次と2次モードの形状を含ませたために、1次成分の抽出時には2次成分を、2次成分の抽出時には1次成分を完全にカットできているが、高次モード成分(3次以降)はカット出来ていない。なお、強風時計測波形に関しては、十分なデータ量が得られなかったために、人力加振試験への適用で用いた平均操作を行わなかった。



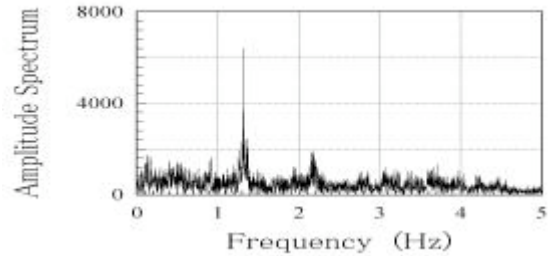
[図6-1：最頂部計測点加速度波形による振幅スペクトル]



[図7-1：正規分解後 1次モード振幅スペクトル]



[図6-2：第2計測点加速度波形による振幅スペクトル]



[図7-2：正規分解後 2次モード振幅スペクトル]

減衰定数の算出 人力加振試験計測波形におけるモード成分の減衰算定と同様の手法を用いて、1次、2次モード成分の減衰定数を求めた。但し、強風時応答波形に関しては、計測された5分間の全波形データを用いて減衰定数を算出したため求まる減衰定数は1手法に対して1つである。以下表2に減衰定数算定の各手法の組合せと得られた減衰定数値を示す。表2によると、1次モード成分の減衰定数は正規分解法を用いた各手法で3%~7%の間、バンドパスフィルターを用いた場合2.5%~9%の間でばらついた。2次モード成分の減衰値は、1次モード成分の減衰定数算定に比べて小さく、1%代後半を中心に各手法でばらつきをみせた。また1次モード成分については正規分解法およびバンドパスフィルターを用いた両手法において単一モードを抽出した後に、自己相関法とAR法を組み合わせた手法で減衰を算出した場合(type4, 8)、他の算定手法で算出した値より大きくなる現象が確認されたが、2次モード成分の減衰算定時にはこのような傾向は見られなかった。

また、2次モードについては正規分解後にRD法と最小二乗法による近似および自己相関法を直接あてはめた場合における減衰定数が非常に小さくなっており、減衰波形に若干の高周波数成分が確認され、正規分解時に計測点の不足から高次モード成分(3次モード成分以上)をカット出来なかった影響が現れているものと思われる。

[表2：減衰算定における各手法の組合せ、および減衰定数]

type	各モード抽出の手法	減衰波形の取得方法	減衰曲線の近似手法	1次モード減衰定数	2次モード減衰定数
type1	正規分解法	RD法	対数減衰率	4.16%	1.20%
type2			最小二乗法	3.12%	0.29%
type3		自己相関法	直接	4.75%	0.73%
type4			AR法	6.95%	1.62%
type5	バンドパスフィルター	RD法	対数減衰率	5.46%	3.31%
type6			最小二乗法	2.51%	2.10%
type7		自己相関法	直接	5.84%	1.97%
type8			AR法	9.12%	1.95%

5. まとめ

正規分解法を人力加振試験で計測された加速度波形、および1996年の台風12号通過時に計測された加速度波形に適用した。その際、鉄塔塔体の低次振動以外のガイシや個材振動成分の影響を考慮に入れなければならないことを示した。人力加振試験データへ正規分解を適用した際には、その成分を低減する算定例を示し、1次、2次、3次モード成分の抽出を行ったところ、それぞれの単一モード成分を精度良く抽出することが出来た。また、正規分解後に得られた単一モード成分における減衰定数を求めたところ、バンドパスフィルターを用いた場合より、正規分解法を用いた方が減衰値算定の際に、小さなばらつきを示すことを確認した。また強風応答時計測波形に正規分解法を適用した際に、加速度計の設置数の不足から高次モード成分を十分にカット出来なかったため、求められた減衰定数に影響が生じた。今後、正規分解法を用いることを想定した計測を行う際には、加速度計(変位計)の設置数について考慮した上で加振試験もしくは強風時の計測を行うことが望まれる。

参考文献

- 1) 児玉他；多自由度系時刻歴波形のモード別波形抽出法について、日本建築学会九州支部研究報告、2001
- 2) 高橋；多自由度系モデルの風応答時刻歴波形のモード別波形抽出法について、九州大学修士課程修了論文、2001
- 3) 前田他；多自由度系構造物の時刻歴応答波形のモード別波形抽出法について no. 1, 2, 日本建築学会大会報告 20083, 84, 2001
- 4) 田村他；RD法による構造物のランダム振動時の減衰評価、日本建築学会構造系論文報告集 454, 1993